داود معصومی‌مهوار

ماجراهای کلاس ریاضی

محاسبه‌گر غریب

سمانه: نرگس محاسبهٔ عجیبی انجام داده. او مجموع همهٔ عددهای طبیعی را حساب کرده، ولی مجموع عددهای طبیعی مقداری منفی شده! امکان دارد تا درس شروع نشده، شما هم نگاهی بکنید و نظر بدهید؟

$$s=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+\ldots\Rightarrow$$
$$s=۱+(۲+۳+۴)+(۵+۶+۷)+(۸+۹+۱۰)+\ldots\Rightarrow$$
$$s=۱+۹+۱۸+۲۷+\ldots\Rightarrow$$
$$s=۱+۹(۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+\ldots)\Rightarrow$$
$$s=۱+۹s\Rightarrow$$
$$-۱=۸s\Rightarrow$$
$$s=-\frac{۱}{۸}$$

الف) محاسبه‌های پای تخته

من: محاسبه‌های نرگس را که پای تخته نوشته شده، دیدم. بد نیست آن را بررسی کنیم.

پریسا: نتیجهٔ محاسبه‌ها درست به نظر نمی‌رسد، ولی محاسبه‌ها کاملاً درست و منطقی به نظر می‌رسند. حتی اگر مثل شما سخت‌گیری کنیم، باز هم نرگس می‌تواند از محاسبه‌هایش دفاع کند و دلیل درستی هر خط از آن را بنویسد.

من: خب این کار را به تو یا نرگس واگذار می‌کنیم.

پریسا پای تخته رفت و چیزهایی اضافه کرد.

نامگذاری

$$s=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+\ldots\Rightarrow$$

تغییر آرایش

$$s=۱+(۲+۳+۴)+(۵+۶+۷)+(۸+۹+۱۰)+\ldots\Rightarrow$$

محاسبهٔ ساده

$$s=۱+۹+۱۸+۲۷+\ldots\Rightarrow$$

خاصیت پخشی

$$s=۱+۹(۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+\ldots)\Rightarrow$$

همان نام‌گذاری

$$s=۱+۹s\Rightarrow$$
$$-۱=۸s\Rightarrow$$
$$s=-\frac{۱}{۸}$$

ب) محاسبه‌های دقیق‌تر

پریسا: ابتدا نام مجموع عددهای طبیعی را S گذاشتیم. سپس یک را جدا کردیم و بقیه را سه‌تا سه‌تا جمع زدیم. مجموع ۲، ۳ و ۴ برابر ۹ و مجموع ۵، ۶ و ۷ برابر ۱۸ شده است و ... سپس می‌بینیم که به‌جز عدد ۱ بقیه همگی مضرب ۹ هستند. بنا بر خاصیت پخشی، از ۹ فاکتور می‌گیریم. دوباره مجموع عددهای طبیعی را می‌بینیم و آن را S می‌نامیم. معادلهٔ S=1+9S به دست می‌آید که با حل آن مقدار مجموع عددهای طبیعی، یعنی S برابر با منهای یک‌هشتم به دست می‌آید.

من: خب حالا بررسی دقیق‌تر این استدلال ساده‌تر شد. راهنمایی می‌کنم که دو جای این استدلال نادرست است. فکر کنید.

لیلا: خیلی مطمئن نیستم، ولی اگر بخواهم سخت‌گیری کنم، استفاده از خاصیت پخشی را هدف می‌گیرم. در کتاب‌های درسی ما خاصیت پخشی برای جمع دو تا عدد بیان شده است؛ مثلاً ۹×۳+۹×۴ = ۹(۳+۴). اما نرگس آن را برای بی‌نهایت عدد به کار برده است.

اعظم: اینکه حاصل جمع چند عدد طبیعی منفی شده است، خود نشانه‌ای واضح‌تر برای نادرستی محاسبه‌هاست. ولی خاصیت پخشی فقط برای دو عدد نیست. بارها آن را برای سه عدد یا بیشتر از آن هم به کار برده‌ایم.

سوده: بارها دیده‌ایم که باید ایراد استدلال را پیدا کنیم، وگرنه مجبوریم که نتیجه را، هر چند که عجیب باشد، بپذیریم. پس منفی بودن آن مجموع را نمی‌توانیم دلیل نادرستی محاسبه‌ها و استدلال بدانیم.

من: با سوده موافقم. لیلا هم خوب ایراد را پیدا کرد. ولی اعظم باید خوب توجه کند که خاصیت پخشی برای مجموع دو عدد بیان شده و به‌سادگی می‌توان آن را برای سه یا چهار تا عدد به کار برد. حتی برای مجموع چهل عدد یا چهل‌هزار عدد. ولی آیا نرگس همین کار را کرده است؟ او برای مجموع «چند تا» عدد به کار برده است؟

نرگس: لابد دعوای قدیمی را پیش می‌کشید. موضوع «بی‌نهایت» است؟

من: بله. اگر این استدلال را برای هر تعداد دلخواهی از عددهای طبیعی به کار ببرید، نتیجه حتماً درست و منطقی خواهد بود. اما به کار بردن این استدلال برای بی‌نهایت عدد، بی‌پشتوانه

است. به همین سبب نتیجه ممکن است عجیب و غریب به دست بیاید.

زهرا: اتفاقاً من استدلال مشابهی را در کتابی دیدم که نتیجهٔ معقولی هم داشت. ولی شک داشتم که بیان کنم یا نه.

$$s=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۳۲}+\frac{۱}{۶۴}+.....\Rightarrow$$

$$s=\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۳۲}+\frac{۱}{۶۴}+.....)\Rightarrow$$

$$s=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۳۲}+.....)\Rightarrow$$

$$s=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}s\Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲}s=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$

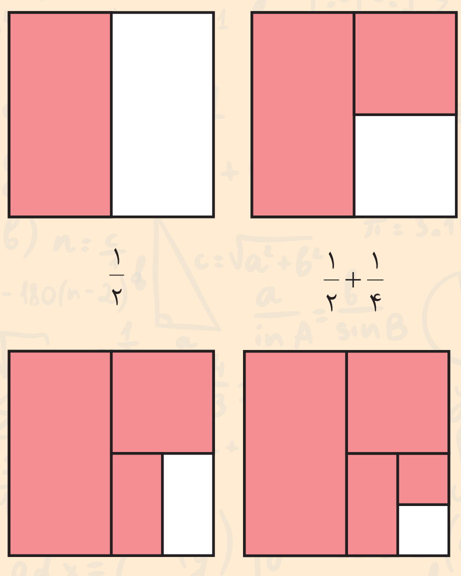
$$s=۱$$

پ) استدلال مشابه

نرگس: اینجا هم تغییر آرایش داده شده و از خاصیت پخشی استفاده شده است. چرا اینجا ایراد نمی‌گیرید؟ چرا اینجا نتیجه نادرست نیست؟

من: اتفاقاً اینجا هم همان ایرادها وجود دارند. البته دو تا ایراد بود که یکی را لیلا پیدا کرد. دومی هنوز پیدا نشده است.

سمیه: ولی به نظر می‌رسد استدلال زهرا درست باشد. من در کتابی آن را دیده‌ام و اتفاقاً با شکل هم نمایش داده شده بود.



$\frac{۱}{۲}$ — $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}$ — $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}$ — $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}$

سمیه: همان‌طور که در شکل می‌بینیم، هر قدر این مجموع را بیشتر حساب کنیم، حاصل به عدد یک نزدیک‌تر می‌شود. یعنی اگر مجموع بی‌نهایت کسر را حساب کنیم، حاصل دقیقاً یک خواهد بود.

من: این شکل و همچنین بیان سمیه هر دو خوب هستند و کمک می‌کنند که ایراد باقی‌مانده را پیدا کنید. راهنمایی می‌کنم که به این جملهٔ سمیه توجه کنید: «اگر مجموع بی‌نهایت کسر را حساب کنیم، حاصل دقیقاً یک خواهد بود.»

سمیه: فکر کنم فهمیدم. همهٔ آنچه که شکل بیان می‌کند درست است. در ضمن هیچ جای شکل صحبت از مجموع بی‌نهایت عدد نیست.

من: کاملاً درست است. در شکل چند محاسبه دربارهٔ چند عدد دیده می‌شود که همگی درست‌اند. اما تعمیم آن به بی‌نهایت عدد، کار خود شما بود و به شکل ربطی نداشت. از همه مهم‌تر اینکه بدون پشتوانه و استدلال بود.

زهرا: پس منظور شما این است که هر چه این مجموع را بیشتر حساب کنیم، حاصل بیشتر به یک نزدیک می‌شود، ولی حق نداریم از مجموع بی‌نهایت عدد حرف بزنیم؟

من: بله، کاملاً درست می‌گویی. در ضمن حواست هست که ایراد مهم‌تر را پیدا کرده‌ای؟ حالا همه به حرف‌های زهرا فکر کنند و اشارهٔ او را به این ایراد مهم‌تر پیدا کنند.

الهام: حدس می‌زنم واقعاً می‌خواهید بگویید که ما حق نداریم از «مجموع بی‌نهایت عدد» حرف بزنیم.

من: بله، موضوع همین است. جمع عددها نیز برای دو، سه یا چند عدد معنا دارد. حتی سه میلیون عدد را می‌توان با هم جمع زد. ولی اگر کسی می‌خواهد از مجموع بی‌نهایت عدد حرف بزند، اول باید منظور خود را دقیقاً توضیح دهد. البته این کار فعلاً در برنامهٔ درسی ما نیست. سال‌های بعد با آن آشنا خواهید شد و خواهید دید که معنایی شبیه به یکی از جمله‌های زهرا دارد که گفت: «هر قدر این مجموع را بیشتر حساب کنیم، حاصل بیشتر به یک نزدیک می‌شود.»

پس خلاصه اینکه همان خط اول محاسبات که نوشته بود $S=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+...$ ایراد دارد. جمع برای تعدادی عدد معنا دارد، ولی این تعداد باید یک عدد طبیعی باشد. هر قدر هم بزرگ باشد، مهم نیست، ولی یک عدد طبیعی باشد.

نرگس: اگر هم استدلال من و هم استدلال سمیه ایراد دارد، چرا نتیجهٔ یکی عجیب و غریب شد، ولی دیگری نه؟

من: این عجیب نیست. همیشه باید انتظار آن را داشته باشید. مثلاً اینکه دو عدد متفاوت داریم، پس حتماً باید مجذور آن‌ها نیز متفاوت باشند، استدلالی نادرست است. ولی این استدلال گاهی نتیجهٔ درست به بار می‌آورد و گاهی نادرست. مثلاً اگر دو عدد متفاوت شما ۵ و منهای ۵ باشند، مجذور آن‌ها ۲۵ خواهد بود که متفاوت نیستند و در استدلال $۵\neq -۵\Rightarrow(۵)^۲\neq(-۵)^۲$ نتیجهٔ نادرستی به دست می‌دهد. اما همین استدلال در $۵\neq۴\Rightarrow(۵)^۲\neq(۴)^۲$ نتیجهٔ درستی دارد.

اصلاً به‌دردنخور بودن استدلال نادرست به همین خاطر است که اعتمادی به درستی یا نادرستی نتیجهٔ آن نیست. اگر مطمئن بودیم که نتیجهٔ استدلال نادرست همیشه نادرست است، پیروزی بزرگی داشتیم. می‌توانستیم نتیجه را بگیریم و مطمئن باشیم که نادرست است، پس نقیض آن باید درست باشد. یعنی راهی پیدا کرده بودیم که به مطالب درست برسیم. اما هیچ اعتمادی به استدلال‌های نادرست نیست.